# Pivot de Gauss : calcul de l'image et du noyau

Louis Gass

## 1 Rappels

### 1.1 Matrices

Soit $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimensions $p$ et $n$ sur un corps commutatif $K$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $E$ et $(f_1, \dots, f_n)$ une base de $F$. On note $M_{n,p}(K)$ l'ensemble des matrices à $n$ lignes et $p$ colonnes à coefficients dans $K$.

**A retenir.** *Le nombre de colonnes correspond à la dimension de l'**espace de départ**, ici $E$. Le nombre de lignes (i.e la taille d'une colonne) correspond à la dimension de l'**espace d'arrivée**, ici $F$.*

L'espace $M_{n,p}(K)$ peut être vu comme l'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $F$, écrites dans les bases respectives. Si $\varphi : E \to F$ est une application linéaire de $E$ dans $F$, on lui associe la matrice de $M_{n,p}(K)$ définie par

$$M_\phi = \begin{pmatrix} m_{11} & & \dots & & m_{1p} \\ & \ddots & & & \\ \vdots & & m_{ij} & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ m_{n1} & & \dots & & m_{np} \end{pmatrix},$$

où les $m_{ij}$ sont définis par

$$\forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad M_\phi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} f_i. \tag{1}$$

Alternativement (et c'est la bonne manière de voir une matrice comme application linéaire), on a

$$M_\phi = \left( \begin{array}{c|c|c|c|c} C_1 & \dots & C_j & \dots & C_p \end{array} \right), \tag{2}$$

où la colonne $C_j$ est l'image du vecteur $e_j$ dans la base $(f_1, \dots, f_n)$. Inversement, toute matrice $M$ encode une application linéaire $\phi$ via la relation (1).

### 1.2 Image d'une matrice

Soit $\phi$ une application linéaire de $E$ dans $F$. On note

$$\mathrm{Im}(\phi) = \{\phi(x) \mid x \in E\} \subset F.$$

C'est un sous-espace vectoriel de $F$. Sa dimension s'appelle le **rang** de l'application $\phi$ et est noté

$$\mathrm{rg}(\phi) = \dim(\mathrm{Im}(\phi)).$$

Puisque $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de $E$, on a la relation

$$\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{Vect}(\phi(e_1), \dots, \phi(e_p)).$$

L'image d'une application linéaire est donc engendrée par l'image d'une base de l'espace de départ. Cela nous permet de définir l'image d'une matrice $M$ comme l'image de l'application linéaire associée dans une base. Autrement dit, pour une matrice $M \in M_{n,p}(K)$ constituée des colonnes $(C_1, \dots, C_p)$ comme dans (2), on a

$$\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p).$$

### 1.3 Noyau d'une matrice

Soit $\phi$ une application linéaire de $E$ dans $F$. On note

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \{x \in E \mid \phi(x) = 0\} \subset E.$$

C'est un sous-espace vectoriel de $E$. On a le théorème fondamental suivant qui relie la dimension du noyau et de l'image.

**Théorème 1.1** (Théorème du rang)**.**

$$\mathrm{rg}(\phi) + \dim(\mathrm{Ker}(\phi)) = \dim(E).$$

Pour une matrice $M \in M_{n,p}(K)$, le noyau est défini comme le noyau de l'application linéaire associée. Concrètement,

$$\mathrm{Ker}(M) = \{x \in K^p \mid Mx = 0\}.$$

Un élément du noyau doit être vu comme un vecteur de taille $p$ qui encode les combinaisons linéaires nulles des colonnes de la matrice. Pour une matrice $M \in M_{n,p}(K)$ constituée des colonnes $(C_1, \dots, C_p)$,

$$x \in \mathrm{Ker}(M) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{p} x_j C_j = 0.$$

## 2 Matrice échelonnée (réduite)

Afin de calculer efficacement l'image et le noyau d'une matrice, il existe un algorithme appelée pivot de Gauss (ou *row reduction* en anglais). Le but est de transformer la matrice originale en une matrice plus simple pour laquelle l'image et le noyau sont facile à calculer.

### 2.1 Matrice échelonnée

Une matrice $A$ est dite **échelonnée** si chaque ligne commence par un nombre de zéros strictement supérieur à la ligne du dessus. Par exemple, la matrice $A$ suivante est échelonnée :

$$A = \begin{pmatrix} \oplus & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \oplus & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \oplus & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

L'ensemble des premiers éléments non nuls de chaque ligne, définis par les coefficients $\oplus$, sont appelé les **pivots** de la matrice $A$.

**Théorème 2.1.** *Le rang d'une matrice échelonnée $A$ est égale au nombre de pivots de la matrice. Une base de l'image est donnée par les colonnes contenant un pivot.*

Dans l'exemple (3), $\mathrm{rg}(A) = 5$ et une base de l'image est donnée par les colonnes $1, 3, 4, 7$ et $9$. La preuve est très simple est repose sur l'observation que les colonnes contenant un pivot forment une famille échelonnée et est donc libre. Toutes les autres colonnes de la matrice peuvent se construire comme combinaison linéaire de ces colonnes, ainsi elles forment une base de l'image.

## 2.2 Matrice échelonnée réduite

Pour connaître une base du noyau, la précédente observation n'est pas satisfaisante. On veut savoir plus précisément comment les autres colonnes peuvent s'obtenir comme combinaison linéaire des colonnes contenant un pivot. Une telle combinaison linéaire nous donne directement un élément du noyau.

Le calcul direct est possible lorsque la matrice $A$ est dite **échelonnée réduite**, c'est-à-dire lorsque $A$ est échelonnée, que chaque pivot vaut 1 et que le pivot est le seul élément non nul de la colonne qui le contient. Concrètement, la matrice $A$ prend la forme suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Dans ce cas le calcul du noyau est simple. Chaque colonne qui ne contient pas de pivot peut s'écrire comme combinaison linéaire des colonnes contenant un pivot. Si on note $j_1, \ldots, j_k$ la suite ordonnée des indices qui contiennent un pivot ($k$ étant le rang de la matrice), et $C_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj})^T$ la $j$-ème colonne de la matrice dont on suppose qu'elle ne contient pas de pivot, alors on a immédiatement

$$C_j = \sum_{s=1}^{k} a_{sj} C_{j_s}.$$

**Théorème 2.2.** *Une base du noyau de $A$ est donnée par les vecteurs*

$$e_j - \sum_{s=1}^{k} a_{sj} e_{j_s},$$

*où $j$ parcours les indices pour lesquels la colonne $j$ ne contient pas de pivot.*

**Théorème 2.3.** *Le rang d'une matrice échelonnée $A$ est égale au nombre de pivots de la matrice. Une base de l'image est donnée par les colonnes contenant un pivot.*

La preuve est directe. Il est clair que cette famille de vecteur appartient au noyau et est libre car échelonnée. C'est une base en vertu du théorème du rang (le rang de la matrice étant donné par le nombre de pivots).

Une manière pratique de construire cette base du noyau est la suivante. On se base sur l'exemple de matrice donnée en (4). On retire d'abord les lignes de zéros finales :

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Pour chaque colonne qui ne contient pas de pivot, on insère à la ligne correspondante une nouvelle ligne de coefficient tous nuls excepté pour un pivot qui vaut $-1$, de sorte que ce nouveau pivot se situe sur la diagonale de la nouvelle matrice. Successivement cela donne

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

La matrice ainsi obtenue est carré de taille $p$ et une base du noyau est donnée par les vecteurs colonnes de cette matrice contenants les pivots $-1$. Dans l'exemple ci dessus, une base du noyau de la matrice $A$ est donnée par les colonnes $2, 5, 6$ et $8$ de la nouvelle matrice ci dessus.

# 3 Pivot de Gauss

Dans le cas d'une matrice $M$ générale, on se demande comment se ramener au cas où la matrice est échelonnée afin de pouvoir trouver une base de l'image et du noyau de la matrice $M$. C'est le but de l'algorithme du pivot de Gauss.

**Théorème 3.1.** *Soit $M \in M_{n,p}(K)$. Il existe une matrice $P$ inversible de $M_{n,n}(K)$ et une unique matrice échelonnée réduite $A \in M_{n,p}(K)$ telle que*

$$PM = A.$$

La preuve de ce théorème est algorithmique : on effectue des opérations sur les lignes (transvection, permutation, dilatation) afin "d'éliminer" des coefficients pour se ramener à une forme réduite. C'est l'algorithme du pivot de Gauss. Effectuer ces opérations sur les lignes équivaut à multiplier la matrice $M$ à gauche par une certaine matrice inversible explicite. La matrice finale $P$ est le produit de toutes ces matrices inversibles.

## 3.1 Calcul du noyau

Pour calculer une base du noyau de la matrice $M$, c'est très simple. Puisque la matrice $P$ est inversible, on observe que

$$\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Ker}(A).$$

La recherche du noyau de $M$ se fait donc en mettant $M$ sous forme échelonnée réduite puis en utilisant le théorème 2.2 pour les matrices échelonnées réduite.

## 3.2 Calcul de l'image

Pour calculer l'image de la matrice $M$, on la met sous forme échelonnée (pas forcément réduite). L'image de $M$ est engendrée par les vecteurs colonnes de $M$ tels que les colonnes correspondantes dans la matrice échelonnée $A$ contiennent un pivot. C'est une conséquence du fait que le rang d'une famille de vecteurs est préservé par la multiplication par une matrice inversible.

## 3.3 Un exemple

Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 4 & 8 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & -1 & 7 & 15 & 2 & 14 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 5 & 11 & 2 & 14 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 6 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 7 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

En effectuant un pivot de Gauss sur la matrice $M$ on obtient l'existence d'une matrice inversible $P$ telle que

$$PM = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette nouvelle matrice est échelonnée réduite et les pivots sont situés sur les colonnes $1, 3, 4, 7$ et $9$. On en déduit qu'une base de l'image de $M$ est donnée par les colonnes de $M$ associées :

$$\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\2\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Pour le calcul du noyau, on rajoute artificiellement des pivots $-1$ là où il en manque dans la matrice $PM$. On obtient la matrice carré

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Les $(-1)$ sont situés sur les colonnes $2, 5, 6, 8$. Une base du noyau de $M$ est donc donnée par

$$\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\\-1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\4\\3\\0\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\\3\\0\\0\\5\\-1\\0\end{pmatrix}\right).$$

# 4 Quelques applications

## 4.1 Calcul de l'inverse d'une matrice

Soit $M \in M_n(K)$ une matrice carré inversible. On peut facilement inverser la matrice $M$ à l'aide du pivot de Gauss. Pour cela, on note $\mathrm{Id}_n$ la matrice identité de taille $n$. On construit la matrice

$$\tilde{M} = \left(\begin{array}{c|c} M & \mathrm{Id}_n \end{array}\right).$$

On met la matrice $\tilde{M}$ sous forme échelonnée réduite. Il est facile de voir que $M$ est inversible si et seulement si la forme échelonnée réduite de $M$ est la matrice identité. Dans ce cas, la forme échelonnée réduite de $\tilde{M}$ sera donnée par

$$P\tilde{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Id}_n & P \end{array}\right).$$

La matrice $P$ est donc l'inverse de $M$. Par exemple, soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

La forme échelonnée réduite de la matrice

$$\tilde{M} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

via un pivot de Gauss est donnée par

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Ainsi,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

## 4.2 Calcul du déterminant d'une matrice

Soit $M \in M_{n,n}(K)$ une matrice triangulaire supérieure. Alors

$$\det(M) = \prod_{i=1}^{n} m_{ii}.$$

C'est le cas simple où il est facile de calculer le determinant d'une matrice. Dans le cas général, on applique le pivot de Gauss pour ce ramener à ce cas. Regardons de plus près les trois opérations :

- **Transvection** : Ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne ne change pas le déterminant.
- **Dilatation** : Multiplier une ligne par $\lambda$ multiplie le déterminant par $\lambda$.
- **Permutation** : Permuter deux lignes multiplie le déterminant par $-1$.

Lorsqu'on applique le pivot de Gauss sur une matrice carré pour obtenir une forme échelonnée (pas nécessairement réduite), il n'est pas nécessaire d'appliquer de dilatation : seules les transvections et les permutations suffisent. En revanche, il faut garder une trace du nombre de permutations de lignes car celles-ci changent le signe du déterminant. Par exemple,

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6.$$

## 4.3 Résolution d'un système linéaire

Soit $A \in M_{n,p}(K)$ et $b$ un vecteur colonne de taille $n$. On considère le système linéaire $Ax = b$ d'inconnue $x$, un vecteur colonne de taille $p$. Cette équation a une solution si et seulement si $b \in \mathrm{Im}(A)$. Soit $x_0$ une solution particulière du système. L'ensemble des solutions à ce système est alors donné par l'espace affine

$$x_0 + \mathrm{Ker}(A).$$

On peut réécrire le système sous la forme

$$\begin{pmatrix} A \mid b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \hline -1 \end{pmatrix} = 0.$$

On est donc réduit à la recherche d'un noyau, et il suffit de mettre la matrice $(A \,|\, b)$ sous forme réduite. Si $b$ appartient à l'image de $A$ alors il n'y a pas de pivot sur la dernière colonne. En appliquant la stratégie du gonflement avec pivot artificiel pour trouver le noyau, la dernière colonne nous donne exactement un élément du noyau de la matrice $(A \,|\, b)$ sous la forme

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \hline -1 \end{pmatrix},$$

Et $x_0$ est donc une solution particulière du système. En revanche, si $b$ n'appartient pas à l'image de $A$, il y a nécessairement un pivot sur la dernière colonne, auquel cas l'équation n'a pas de solutions. Par exemple, résolvons

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

On met la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right)$$

sous forme réduite ce qui nous donne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

On rajoute artificiellement des pivots pour obtenir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right). \tag{11}$$

Ainsi, une solution particulière est donnée par

$$\begin{pmatrix} \\ x_0 \\ \\ \hline -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \hline -1 \end{pmatrix},$$

et la solution générale par $x = x_0 + \mathrm{Ker}(A)$. Ici on peut directement lire le noyau de la matrice $A$ sur la matrice échelonnée réduite gonflée (11). Il suffit de prendre les colonnes (sauf la dernière) qui ont un pivot $-1$ et d'enlever le dernier coefficient. Ici, on a

$$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Ainsi, la solution générale de l'équation (10) est donnée par

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in K.$$

## 4.4 Somme de deux sous espaces vectoriels

Soit $U$ et $V$ deux sous espace vectoriels de dimensions respectives $k$ et $m$ d'un espace vectoriel $E$ muni d'une base $(e_1, \dots, e_p)$. Supposons que l'on connaisse des bases de $U$ et de $V$ écrites dans la base $(e_1, \dots, e_p)$. On cherche à calculer une base de $U + V$.

Supposons que

$$U = \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_k) \quad \text{et} \quad V = \mathrm{Vect}(D_1, \dots, D_m),$$

où $C_1, \dots, C_k, D_1, \dots, D_m$ sont des colonnes de tailles $p$ qui représentent l'écriture des bases de $U$ et de $V$ dans la base $(e_1, \dots, e_p)$. On a alors

$$U + V = \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_k, D_1, \dots, D_m).$$

On a donc $U + V = \mathrm{Im}(M)$, où

$$M = \left( \begin{array}{c|c|c|c|c|c} C_1 & \dots & C_k & D_1 & \dots & D_m \end{array} \right). \tag{12}$$

Il suffit donc de calculer l'image de cette matrice pour trouver la somme. Par exemple, soit

$$U = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad V = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

On construit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 7 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sa forme échelonnée réduite est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les pivots sont situés sur les colonnes $1, 2, 3$ et $5$. Ainsi, une base de $U + V$ est donnée par

$$U + V = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

## 4.5 Intersection de deux sous espaces vectoriels

On garde les notations du paragraphe précédent. Supposons cette fois que l'on veuille calculer une base de $U \cap V$. Soit $x$ un vecteur de $U \cap V$. Alors on a

$$x = \sum_{i=1}^{k} y_i C_i \quad \text{et} \quad x = \sum_{j=1}^{m} z_i D_j,$$

pour certains coefficients $y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_m$ dans $K$. Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{k} y_i C_i - \sum_{j=1}^{m} z_i D_j = 0.$$

Autrement dit, le vecteur colonne $(y_1, \ldots, y_k, -z_1, \ldots, -z_m)^T$ appartient au noyau de la matrice $M$ définit en (12). Inversement, étant donné un vecteur $(y_1, \ldots, y_k, -z_1, \ldots, -z_m)^T \in \mathrm{Ker}(M)$, le vecteur

$$x = \sum_{i=1}^{k} y_i C_i = \sum_{j=1}^{m} z_i D_j$$

appartient bien à $U \cap V$. Il suffit donc de calculer le noyau de $M$ pour en déduire $U \cap V$. Remarquons au passage que le théorème du rang appliqué à la matrice $M$ donne directement le théorème suivant.

**Théorème 4.1** (Grassmann).

$$\dim(U + V) + \dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V).$$

Dans l'exemple du paragraphe précédent avec

$$M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 7 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

la forme échelonnée réduite de la matrice $M$ nous donne

$$\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Vect}\left(\left(\begin{array}{c} -1 \\ 2 \\ 2 \\ \hline -1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 2 \\ \hline 0 \\ 2 \\ -1 \end{array}\right)\right).$$

Ainsi, les vecteurs

$$x_1 = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

forment une base de $U \cap V$ :

$$U \cap V = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$