# Annexe : Les espaces fonctionnels classiques (et d'autres beaucoup moins)

Louis Gass

30 novembre 2020

## 1 Rappels sur la topologie initiale et la topologie finale associées à une famille d'applications

En analyse fonctionnelle, on n'est pas toujours amené à travailler dans des espaces normés (par exemple, l'espace des distributions). On a pourtant envie de généraliser certaines notions et théorèmes (ensemble borné, séquentielle continuité, lemme de Baire, Banach-Steinhaus, etc) sur des espaces vectoriels muni d'une topologie qui n'est pas normable, ni même parfois métrisable.

La plupart des espaces vectoriels topologiques que l'on rencontre sont soit des espaces de Banach, soit des limite projectives/inductives de Banach, soit des duaux topologiques de ces espaces. En particulier, les topologies qui en découlent sont souvent les topologies initiales associées à une famille de semi-normes. On pensera notamment aux espaces de Frechet ou aux topologies faibles ou faibles-*.

### 1.1 Topologie initiale associée à une famille d'applications

Soit $X$ un ensemble et $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'applications définies sur $X$, telle que la fonction $f_i$ prend ses valeurs dans un espace topologique $Y_i$.

**Définition 1.1.** La topologie initiale sur $X$ associée à la famille d'applications $(f_i)_{i\in I}$ est la topologie la moins fine (la plus faible) rendant les applications $f_i$ continues. C'est la topologie engendrée par tous les ensembles de la forme $f_i^{-1}(U)$, pour $i \in I$ et $U$ un ouvert de $Y_i$.

Par exemple, la topologie d'un espace métrique $(E, d)$ est associée à la famille d'applications $(f_x)_{x\in E}$ définies par :

$$\begin{aligned} f_x : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longrightarrow d(x, y) \end{aligned}$$

Dans notre cadre, on aura souvent $Y_i = \mathbb{R}$. La topologie sur $X$ sera donc engendrée par les ensembles :

$$\{x \in X \mid a < f_i(x) < b\}$$

Pour $i \in I$ et $a, b \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{Q}$). En particulier, une base d'ouvert sera donnée par les intersections finies des ensemble ci dessus, pour $i \in I$.

Il est facile de décrire les applications continue à valeur dans un espace topologique $X$ dont la topologie est donnée par la famille d'application $(f_i)_{i\in I}$.

**Théorème 1.1.** *Soit $Z$ un espace vectoriel topologique et $g$ une application de $Z$ dans $X$. Alors l'application $g$ est continue si et seulement si toutes les applications $f_i \circ g$ sont continues, pour $i \in I$.*

La topologie initiale est relativement aisée à décrire, et de nombreux théorèmes garantissent des propriétés plus fortes sur la topologie, comme la séparation, la métrisabilité, la complétude, le fait d'être à base dénombrable (de voisinages), etc.

### 1.2 Topologie finale associée à une famille d'applications

Soit $X$ un ensemble et $(g_i)_I$ une famille d'applications à valeur dans $X$, telle que pour tout $i \in I$ la fonction $g_i$ soit définie sur espace topologique $Z_i$.

**Définition 1.2.** La topologie finale sur $X$ associée à la famille d'applications $(g_i)_I$ est la topologie plus fine rendant les applications $g_i$ continues. Un ensemble $U \subset X$ est ouvert si et seulement si $g_i^{-1}(U)$ est ouvert dans $Z_i$, pour tout $i \in I$.

Il est facile de décrire les applications continues sur un espace topologique $X$ dont la topologie est donnée par la famille d'application $(f_i)_{i \in I}$.

**Théorème 1.2.** *Soit $W$ un espace topologique et $h$ une application de $X$ dans $W$. Alors l'application $h$ est continue si et seulement si l'application $h \circ g_i$ est continue pour tout $i \in I$.*

Lorsque la famille d'applications $(g_i)_{i \in I}$ est réduite à une unique application $g$, la topologie sur $X$ est la topologie quotient $Z/\sim$, ou la relation d'équivalence est donnée par :

$$x \sim y \quad \text{si et seulement si} \quad g(x) = g(y)$$

En général la topologie finale est plus délicate à décrire que la topologie initiale, même dans le cas ou la famille des $(g_i)_{i \in I}$ est réduite à un singleton. Il faudra toujours vérifier en particulier que la topologie quotient vérifie des bonnes propriété de séparation.

## 2 Rappels sur les espaces vectoriels topologiques

**Définition 2.1.** Un espace vectoriel topologique $E$ (sur un corps de base $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est un espace vectoriel muni d'une topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel : on demande à ce que les applications :

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longrightarrow x + y \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, x) &\longrightarrow \lambda.x \end{aligned}$$

soient continues.

Nous ne rentrerons pas dans les nombreux théorèmes et définitions qui gravitent autour des espaces vectoriels topologiques. Il faut savoir qu'il est possible de donner un sens aux notions aux notions d'ensemble bornés, ainsi que de suite de Cauchy (et donc de complétude) sans recourir à une quelconque notion de distance. Cela permet d'étendre certains théorèmes (séquentielle continuité, baire, etc) aux e.v.t. sous certaines hypothèses plus faibles.

## 2.1 Espace vectoriel topologique localement convexe (evtlc)

**Définition 2.2.** Une semi-norme $\mathcal{N}$ sur un espace vectoriel $E$ est une application de $E$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \quad \mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$
- $\mathcal{N}(x+y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$

Une semi-norme vérifie donc tous les axiomes d'une norme, excepté celui de séparation. Si $\mathcal{N}(x) = 0$, on n'a pas forcément $x = 0$. Par exemple, soit $x \in E$ et $T$ une forme linéaire sur $E$. On peut vérifier que l'application :

$$x \mapsto |T(x)|$$

est une semi-norme sur $E$.

Autre exemple, soit $A$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, et $E$ l'ensemble des fonction continues sur $\mathbb{R}$. Alors l'application :

$$f \mapsto \sup_{x \in A} |f(x)|$$

est une semi-norme sur $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

**Définition 2.3.** Un espace vectoriel topologique est dit localement convexe s'il vérifie l'une des deux propriétés suivantes équivalentes :

- Le vecteur nul admet une base de voisinages formée de convexes
- Il existe une famille de semi-normes $(\mathcal{N}_p)_{p \in I}$ telle que la topologie de $E$ est la topologie initiale pour l'ensemble d'applications :

$$\{x \mapsto \mathcal{N}_p(x-y) \mid p \in I, y \in E\}$$

L'équivalence s'appuie sur la notion de jauge d'un convexe. Il est alors facile de remarquer que l'espace topologique $E$ est séparé si et seulement si pour tout vecteur $v$ non-nul dans $E$, il existe une semi-norme $\mathcal{N}_p$ tel que $\mathcal{N}_p(v) \neq 0$ (le cas contraire, il est évidemment impossible de distinguer le vecteur $v$ et le vecteur nul). Nous verrons des exemples fondamentaux de topologies définies par des semi-normes section suivante.

Soit $T$ une application linéaire entre deux evtlc $E$ et $F$ munies de leurs familles de semi-normes $(\mathcal{N}_p)_{p \in I}$ et $(\mathcal{M}_q)_{q \in J}$. Comme dans le cas normé, on a un critère simple pour montrer la continuité de l'application $T$.

**Théorème 2.1.** *L'application linéaire $T$ est continue si et seulement si pour tout indice $q \in J$, on peut trouver un nombre fini d'indices $p_1, \dots p_n$ dans $I$ et une constante $C$ telle que :*

$$\forall x \in E, \quad \mathcal{M}_q(T(x)) \leq C \sum_{k=1}^{n} \mathcal{N}_{p_k}(x)$$

En particulier, si $T$ est une forme linéaire sur un evtlc $E$, elle est continue si et seulement si il existe une constante $C$ telle que :

$$\forall x \in E, \quad |T(x)| \leq C \sum_{k=1}^{n} \mathcal{N}_{p_k}(x)$$

pour une certaine famille finie d'indices $p_1, \ldots, p_n$. Lorsque $E$ et $F$ sont des espaces vectoriels normés (c'est-à-dire dont la topologie est donnée par une unique norme), on retombe sur le critère classique de continuité, à savoir l'application linéaire $T$ est continue si et seulement si il existe une constance $C$ telle que :

$$\forall x \in E, \quad \|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E$$

On définit la notion d'ensemble borné d'un evltc $E$ munie d'une famille de semi-normes $(\mathcal{N}_p)_{p \in I}$.

**Définition 2.4.** Une partie $A$ de $E$ est dite bornée si :

$$\forall p \in I, \quad \sup_{x \in A} \mathcal{N}_p(x) < +\infty$$

Cette définition coïncide avec la notion de borné lorsque $E$ est un espace vectoriel normé. En anticipant sur les exemples qui vont suivre, on peut par exemple dire qu'une sous-partie $A$ de $H(U)$ (l'ensemble des fonctions holomorphes sur un ouvert $U$ de $\mathbb{C}$) est bornée si et seulement si pour tout compact $K \subset U$, on a :

$$\sup_{f \in A} \sup_{x \in K} |f(x)| < +\infty$$

## 2.2 Espace de Frechet

Soit $E$ un evtlc séparé. Alors on a le critère de métrisabilité suivant.

**Théorème 2.2.** *L'espace $E$ est métrisable si et seulement si sa topologie est définie par une famille dénombrable de semi-normes $(\mathcal{N}_p)_{p \in \mathbb{N}}$. Une métrique explicite est donnée par :*

$$d(x, y) = \sum_{p \geq 0} 2^{-p} \frac{\mathcal{N}_p(x-y)}{1 + \mathcal{N}_p(x-y)}$$

On peut toujours supposer que la famille dénombrable de semi-normes $(\mathcal{N}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est filtrante, c'est-à-dire que $\mathcal{N}_p \leq \mathcal{N}_{p+1}$, quitte a remplacer $\mathcal{N}_p$ par $\sum_{k \leq p} \mathcal{N}_k$. Cela simplifie légèrement le critère de continuité, puisque qu'on pourra restreindre dans le théorème 2.1 la famille d'indices $p_1, \ldots, p_n$ à un seul indice $p$.

Dans le cas d'un espace vectoriel dont la topologie est définie par une famille dénombrable de semi-normes, on pourra donc appliquer tous les théorèmes relatifs aux espaces métriques, notamment le critère de continuité séquentielle, faux en toute généralité.

On fera attention à la notion d'ensemble borné pour un evtlc, qui ne coïncide pas avec la notion de borné pour la distance définie au dessus. En effet, pour cette distance, $E$ est borné par 1, mais n'est bien sur pas borné au sens des evtlc.

**Définition 2.5.** On dit que $E$ est un espace de Frechet s'il est complet pour la distance définie au dessus (ou n'importe quelle distance équivalente).

Nous verrons plus loin des exemples classiques d'espace de Frechet.

### 2.3 Espace de Banach

**Définition 2.6.** Un espace vectoriel topologique est normé si sa topologie est définie par une norme, c'est-à-dire une semi-norme vérifiant la propriété :

$$\mathcal{N}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

C'est donc un evtlc dont la topologie est définie par une seule norme. On notera en général la norme $\|.\|$. Soit $E$ un evtlc muni de sa famille filtrante de semi-normes $(\mathcal{N}_p)_{p\in\mathbb{N}}$. Il est facile de montrer le critère de normabilité suivant.

**Théorème 2.3.** *L'evtlc $E$ est normable si et seulement si il existe un indice $p_0$ tel que la semi-norme $\mathcal{N}_{p_0}$ soit une norme sur $E$ définissant sa topologie.*

Autrement dit, pour toute semi-norme $\mathcal{N}_p$, il existe une constante $C$ telle que :

$$\mathcal{N}_p(x) \leq C\mathcal{N}_{p_0}(x)$$

Moralement, cela signifie que toutes les semi-normes sont contrôlables par une seule semi-norme.

**Définition 2.7.** Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

C'est généralement le cadre dans lequel on débute l'analyse fonctionnel (fonctions continues sur un compact, espaces $L^p$, etc). La plupart des résultats s'étendent à des cadres plus généraux. On citera tout de même une exception notable : le théorème de Riesz qui affirme qu'un ensemble borné est relativement compact si et seulement si l'espace est de dimension finie.

L'espace de Schwartz $(\mathbb{R}^n)$ des fonctions régulières à décroissance rapide, ou encore l'espace $H(U)$ des fonctions holomorphes sur un ouvert $U$ de $\mathbb{C}$, fournissent un contre-exemple au théorème de Riesz dans le cadre des espaces de Frechet. Pour les deux exemples, c'est une conséquence du théorème d'Ascoli. En particulier ces deux espaces ne sont pas normables (le théorème 2.3 fournit un critère plus simple de non-normabilité).

## 3 Rappels sur les duaux topologiques

### 3.1 Les différentes topologies

Soit $E$ un espace vectoriel topologique localement convexe.

**Définition 3.1.** Le dual de $E$, noté $E^*$ est l'ensemble des formes linéaire continues sur $E$.

Il existe plusieurs topologies sur $E^*$. Si $E$ est un espace vectoriel normé, on peut considérer la topologie forte sur $E^*$ qui fait de $(E^*, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Malheureusement cette topologie sur $E^*$ est souvent trop forte (trop d'ouverts, pas assez de compacts) pour les applications en analyse.

Une deuxième topologie envisageable est la topologie faible-*.

**Définition 3.2.** La topologie faible-* sur $E^*$ est la topologie initiale associée à la famille de semi-normes sur $E^*$ :

$$\{T \mapsto |T(x)| \mid x \in E\}$$

C'est la topologie la moins fine rendant toutes les formes linéaire continues. Cette topologie jouit de propriétés remarquables qui en font un outil important en analyse. Par exemple si $E$ est un evtlc, alors la boule unité de $E^*$ est compact pour la topologie faible-* (théorème de Banach-Alaoglu). Ce théorème se généralise à des espaces vectoriels topologiques quelconques (en étendant encore la définition de "borné").

Il existe également sur $E$ une deuxième topologie, appelée topologie faible.

**Définition 3.3.** La topologie faible sur $E$ est la topologie initiale associée à la famille de semi-normes sur $E$ :

$$\{x \mapsto |T(x)| \mid T \in E^*\}$$

Lorsque $E$ est un espace de Banach, la topologie faible sur $E$ n'est jamais métrisable excepté si $E$ est de dimension finie.

### 3.2 Inclusion des duaux topologiques

Soit $E$ un espace vectoriel topologique et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ munie d'une topologie (qui n'est pas nécessairement la topologie induite par $E$). En général, on n'a pas l'inclusion $E^* \subset F^*$ (prendre $F = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$). En revanche, si :

- $F$ est dense dans $E$
- La topologie sur $F$ est plus forte que celle induite par $E$

Alors on a une injection de $E^*$ dans $F^*$ (donnée par la restriction de la forme linéaire à $F$). Ce que l'on traduit parfois par l'adage "plus un espace fonctionnel est petit, plus son dual est grand". Cela est du au fait qu'en analyse fonctionnel, les inclusions d'espaces fonctionnels sont généralement denses (sauf cas particuliers).

Par exemple, les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sont denses dans $L^2$, mais le dual de $L^2$ (qui est isométrique à lui même) s'injecte dans le dual des fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact (qui est l'espace des distributions).

## 4 Les espaces fonctionnels usuels

### 4.1 Remarques générales

On a la plupart du temps des inclusions (topologiques) entre chaque espace fonctionnel. Par exemple, l'ensemble des fonctions mesurables bornées contient l'ensemble des fonctions continues bornées, qui lui-même contient l'ensemble des fonctions infiniment différentiables à support compact. Parfois les inclusions sont vraies seulement "localement", comme le montre l'injection de l'ensemble des fonctions continues dans l'ensemble des fonctions localement intégrables.

La plupart du temps les inclusions considérées seront denses, sauf certains cas exceptionnels. Par exemple, l'ensemble des fonctions continues bornées muni de la norme du suprémum n'est pas dense dans l'espace $L^\infty$. En règle général les espaces $L^\infty$ et ses variantes sont pathologiques car aucun espace fonctionnel usuel plus petit n'est dense dans ces espaces.

Pour chaque espace il existe plusieurs variantes. Soit $A$ un espace de fonctions sur un ouvert $\Omega$ non-vide de $\mathbb{R}^d$, qui contient l'espace des fonctions infiniment différentiables à support compact, noté $C_c^\infty(\Omega)$. On peut définir :

- La variante "locale", dénotée $A_{loc}$. Une fonction $f$ est dans $A_{loc}$ si et seulement si pour toute fonction test $\varphi$, la fonction $\varphi f$ est dans $A$. On définit par exemple $L^1_{loc}(\Omega)$.

- La variante "compacte", dénotée $A_c$. Une fonction $f$ est dans $A_c$ si $f$ est dans $A$ et est à support compact. On définit par exemple $C_c(\Omega)$.
- La variante "décroissante", dénotée $A_0$. On définit $A_0$ comme l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $A$. On définit ainsi $C_0(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, etc. Ce sont en général des fonctions qui présentent une propriété de décroissance sur le bord de $\Omega$. Par exemple les fonctions $H_0^1(\Omega)$ (dans le cas où $\Omega$ est un ouvert régulier) sont les fonctions qui sont nulles sur $\partial\Omega$ (au sens de l'opérateur de trace).
- La variante "differentiable", dénotée $A^k$. Une fonction $f$ est dans $A^k$ si $f$ ainsi que toutes ses dérivées partielles (au sens des distributions) jusqu'à l'ordre $k$ sont dans $A$. C'est ainsi que sont défini les espaces $\mathcal{C}^k$, mais aussi les espaces de Sobolev.

Soit $\Omega$ un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^d$. et $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\Omega$. On note $(K_n)_{n\geq 0}$ une exhaustion de compacts, c'est-à-dire une suite de compacts de $\Omega$ tels que :

— $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$

— $\bigcup_n K_n = \Omega$

Cette construction permet de se ramener à un nombre dénombrable de compacts dans les problèmes d'analyse, puisque tout compact est inclus dans l'un des $K_n$.

De même on notera $K$ un compact quelconque de $\mathbb{R}^d$. On définit les différents espaces fonctionnels usuels. En jaune sont ceux qu'il est absolument nécessaire de connaître.

## 4.2 Espaces de Banach

On commence par les espaces de Banach.

L'espace $\mathcal{C}(K)$ des fonctions continues sur $K$, muni de la norme de la convergence uniforme. On note alors :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in K} |f(x)|$$

Les espaces $\mathcal{C}^k(K)$ pour $0 \leq k < +\infty$ des fonctions $k$ fois continument différentiables sur $K$ (lorsque cela a un sens), muni de la norme de la convergence uniforme de toutes les dérivées partielles. Pour $f \in \mathcal{C}^k(K)$ :

$$\|f\|_{\mathcal{C}^k} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|_\infty$$

L'espace $\mathcal{C}_0(\Omega)$ des fonctions continues sur $\Omega$ telles que :

$$\lim_{x\to\partial\Omega} f(x) = 0$$

On munit cette espace de la norme de la convergence uniforme.

En général, on aura $\Omega = \mathbb{R}$, auquel cas $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues qui décroissent en zero à l'infini.

L'espace $\mathcal{C}_b(\Omega)$ des fonctions continues bornées munies de la norme de la convergence uniforme.

Les espaces $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < +\infty$ des fonctions mesurables modulo l'égalité presque sûre, telles que :

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} < +\infty$$

Et muni de la norme définie ci-dessus.

Pour $1 \leq p < +\infty$, le dual de $L^p$ est $L^q$, où $q$ est le réel tel que $1/p + 1/q = 1$. En particulier les espaces $L^p$ sont réflexifs pour $1 < p < +\infty$.

L'espace $\mathscr{L}^\infty(\Omega)$ (aussi noté $\ell^\infty(\Omega)$) des fonctions mesurables bornées muni de la norme de la convergence uniforme.

L'espace $L^\infty(\Omega)$ des fonctions mesurables presque-sûrement bornées modulo l'égalité presque sûre, c'est-à-dire :

$$\|f\|_\infty = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda(\{|f| > \lambda\} = 0\} < +\infty$$

Et muni de la norme définie ci-dessus (aussi appelée le suprémum essentiel).

Les espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$ des fonctions de $L^p(\Omega)$ qui sont $k$-fois faiblement différentiables et dont les différentielles successives sont dans $L^p(\Omega)$. On le munit de la norme :

$$\|f\|_{k,p} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_p$$

Pour $p = 2$ on le note en général $H^k(\Omega)$.

Les espaces $W_0^{k,p}(\Omega)$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$ des fonctions de $W^{k,p}(\Omega)$ qui s'annulent (au sens de la trace si $\Omega$ est un ouvert régulier) sur $\partial\Omega$, ainsi que les dérivées partielles d'ordre inférieur à $k$. C'est l'adhérence dans $W^{k,p}(\Omega)$ des fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ pour la norme $\|f\|_{k,p}$.

Si $p = 2$ on le note en général $H_0^k(\Omega)$.

Il est important de connaitre $H^1(]0,1[)$, $H_0^1(]0,1[)$ et $H^1(\mathbb{R})$.

## 4.3 Espaces de Fréchet

Vient ensuite les espaces de Fréchet. Ils sont généralement construits à partir d'espaces de Banach. Il y a deux exemples types à avoir en tête :

- Les fonctions infiniment différentiables : on cherche une topologie sur $\mathcal{C}^\infty$ qui reflète la convergence des dérivées partielles à tout ordre.
- Les fonctions continues sur $\Omega$ :on cherche une topologie qui reflète la convergence uniforme sur tout compact.

Les espaces de Fréchet classiques sont les suivants :

L'espace $\mathcal{C}(\Omega)$ des fonctions continues sur $\Omega$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. C'est un espace de Fréchet muni des semi-normes pour $n \geq 0$ :

$$\sup_{x \in K_n} |f(x)|$$

Les espaces $L^p_{loc}(\Omega)$ pour $1 \leq p \leq +\infty$ des fonctions $L^p$ sur tout compact, muni des semi-normes $\|\mathbb{1}_{K_n} f\|_p$ pour $n \geq 0$.

L'espace $\mathcal{C}^\infty(K)$ des fonction infiniment différentiables sur $K$, muni des semi-normes $\|f\|_{\mathcal{C}^k}$ pour $k \geq 0$.

L'espace $\mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ des fonctions infiniment différentiables muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact des dérivées partielles à tout ordre. C'est un espace de Fréchet pour les semi normes suivantes pour $k \geq 0$ et $n \geq 0$ :

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K_n} |\partial^\alpha f(x)|$$

Pour $\Omega = \mathbb{R}^d$, l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions infiniment différentiables à décroissance rapide. C'est un espace de Fréchet associé aux semi-normes pour $n \geq 0$ :

$$\sum_{|\alpha|, |\beta| \leq k} \|x^\beta \partial^\alpha f\|_\infty$$

L'espace $H(\Omega)$ des fonctions holomorphes sur $\Omega$ lorsque celui-ci est un ouvert de $\mathbb{C}$. C'est un espace de Frechet pour les semi normes pour $n \geq 0$ :

$$\sup_{z \in K_n} |f(z)|$$

### 4.4 Espaces LF (topologie complètement hors programme, mais bon à savoir)

Il vient ensuite une classe d'espace vectoriels topologiques qui ne sont pas des espaces de Fréchet mais qui sont plutôt définis comme limite inductive d'espaces de Fréchet. On les appelle les espaces $LF$. L'exemple à avoir en tête est celui d'un espace de fonctions à support compact sur $\Omega$. Les trois principaux sont les suivants.

L'espace $\mathcal{C}_c(\Omega)$ des fonctions continues à support compact sur $\Omega$.

Les espaces $\mathcal{C}^k_c(\Omega)$ pour $0 \leq k < +\infty$ des fonctions $k$ fois différentiables à support compact.

L'espace $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ des fonctions tests, c'est à dire les fonctions infiniment différentiables à support compact.

Il est possible de définir une structure d'espace vectoriel topologique localement convexe sur $\mathcal{C}_c(\Omega)$ (ainsi que sur les deux autres exemples, de manière similaire). Cette topologie est la plus fine topologie localement convexe sur $C_c(\omega)$ rendant les injections $C(K_n) \to C_c(\Omega)$ continues. C'est donc une variante de la topologie finale associée à la famille d'injections ci-dessus.

On donne un critère simple de la continuité d'une application linéaire $T$ définie sur $\mathcal{C}_c(\Omega)$ (ou l'un des deux autres exemples) à valeurs dans un evtlc $E$.

**Théorème 4.1.** *L'application linéaire $T$ est continue si et seulement si pour tout $n \geq 0$, l'application :*

$$T_{|K_n} : K_n \to E$$

*est continue.*

L'application linéaire $T$ est donc continue si et seulement si elle est continue sur chaque $K_n$. De même, on a le critère suivant de convergence de suite dans $C_c(\Omega)$.

**Théorème 4.2.** *Une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers $f$ dans $\mathcal{C}_c(\Omega)$ si et seulement si il existe un compact $K$ tel que :*

- $\forall n \in \mathbb{N}, \ \operatorname{supp} f_n \subset K$
- $\operatorname{supp} f \subset K$
- *La suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f$*

Ce théorème se décline dans les deux autres exemples, en remplaçant la dernière ligne par la convergence uniforme des dérivées jusqu'à l'ordre voulu. Il est donc assez restrictif de converger dans cet espace, puisque une suite convergente est nécessairement à support dans un compact indépendant de la suite.

On fera attention à ne pas dire que l'on définit la topologie sur $\mathcal{C}_c(\Omega)$ par ses suites convergentes, car il n'y a pas unicité d'une telle topologie. Enfin, on peut montrer que ces espaces sont complets en un certain sens.

### 4.5 Espaces de mesures (hors programme)

La catégorie d'espaces suivante concerne les espaces de mesures sur $(\Omega, \mathcal{B})$ où $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne sur $\Omega$, c'est-à-dire la tribu engendrée par les boréliens de $\Omega$. Les mesures apparaissent comme les duaux topologiques d'espaces de fonctions continues via le théorème de représentation de Riesz-Markov. On peut définir plusieurs topologie sur ces espaces, on pourra par exemple considérer la topologie faible-$*$, bien qu'il existe des topologies plus fortes.

**Définition 4.1.** Une mesure positive $\mu$ est une application de $\mathcal{B}$ dans $[0, +\infty]$ telle que :

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\sigma$-additivité : Soit $(E_n)_{n\geq 0}$ une famille disjointe d'éléments de $\mathcal{B}$. Alors :

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 0} E_n\right) = \sum_{n\geq 0} \mu(E_n)$$

**Définition 4.2.** L'application $\mu$ est une mesure finiment additive si la propriété d'additivité n'est vraie que pour une famille finie d'ensembles.

**Définition 4.3.** L'application $\mu$ est une mesure signée si elle est à valeur dans $\mathbb{R}$ et vérifie les axiomes d'une mesure.

On considère parfois qu'elle peut prendre les valeurs $\pm\infty$ mais pas les deux à la fois. Par le théorème de représentation de Hahn, une mesure signée est la différence de deux mesures positives dont l'une au moins est finie. La mesure (signée, finiment additive) $\mu$ est dite :

- localement finie (ou localement bornée) si $\mu(K) < +\infty$ pour tout compact $K \subset \Omega$. Dans notre carde, cette notion coïncide avec celle de mesure de Radon positive.
- finie (ou bornée) si $\mu(\Omega) < +\infty$
- à support compact s'il existe un compact $K$ tel que $\mu(A) = 0$ pour tout ensemble $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ disjoint de $K$.
- absolument continue par apport à la mesure de Lebesgue si pour tout ensemble $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ tel que $\lambda(A) = 0$, on a $\mu(A) = 0$.

Voici les espaces classiques de mesures.

L'espace $\mathfrak{M}_b(\Omega)$ des mesures signées bornées sur $\Omega$.

C'est le dual topologique de $\mathcal{C}_0(\Omega)$. D'après le théorème de Radon-Nikodym, l'espace $L^1(\Omega)$ s'identifie comme le sous-espace de $\mathfrak{M}_b(\Omega)$ des mesure bornées absolument continues pour la mesure de Lebesgue via l'application :

$$f \mapsto m_f : \left\{ g \mapsto \int_\Omega fg \right\}$$

La convergence associée à la topologie faible-$*$ sur $\mathfrak{M}_b(\Omega)$ est appelée convergence faible.

L'espace $\mathfrak{M}_{\text{comp}}(\Omega)$ des mesures signée à support compact sur $\Omega$.

C'est le dual topologique de $\mathcal{C}(\Omega)$.

L'espace $\mathfrak{M}_{loc}(\Omega)$ des mesures de Radon sur $\Omega$.

C'est le dual topologique de $\mathcal{C}_c(\Omega)$. Ce n'est pas un espace de mesures à proprement parler, mais un élément de $\mathfrak{M}_{loc}(\Omega)$ peut tout de même se voir comme la différence (lorsque cela fait sens) de deux mesures positives localement finies. L'espace $L^1_{loc}(\Omega)$ s'identifie comme le sous-espace de $\mathfrak{M}_{loc}(\Omega)$ des mesures de Radon absolument continues pour la mesure de Lebesgue. La convergence associée à la topologie faible-$*$ sur $\mathfrak{M}_{loc}(\Omega)$ est appelée convergence vague.

L'espace $\mathrm{ba}(\Omega)$ (bounded additive) des mesures signées finiment additives.

C'est le dual topologique de $\mathscr{L}^\infty(\Omega)$. Un élément non trivial de cet espace est par exemple donnée par un prolongement continu (par Hahn-Banach) de la forme linéaire $f \mapsto \lim_{x\to+\infty} f(x)$ définie sur les fonctions convergeant à l'infini vers une constante. Cela définit une mesure finiment additive qui est nulle sur toute fonction à support compact. Ce type de mesure est dite supportée en l'infini.

L'espace $\mathrm{rba}(\Omega)$ (regular bounded additive) des mesures signées bornées finiment additives et absolument continues par apport à la mesure de Lebesgue.

C'est le dual topologique de $L^\infty(\Omega)$. Cet espace est le bidual de $L^1(\Omega)$, et ce dernier s'identifie comme le sous-espace de $\mathrm{rba}(\Omega)$ des mesures $\sigma$-additives. Une variante de l'exemple précédent montre que l'injection de $L^1(\Omega)$ dans $\mathrm{rba}(\Omega)$ est stricte, et donc que $L^1(\Omega)$ n'est pas réflexif.

L'espace $\mathcal{C}_b'(\Omega)$, le dual des fonctions continues bornées.

On peut le voir comme un sous-espace de $\mathrm{ba}(\Omega)$. Il s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{C}_b'(\Omega) = \mathfrak{M}_b(\Omega) \oplus \mathfrak{R}(\Omega)$$

Où $\mathfrak{R}(\Omega)$ est l'ensemble des mesures signées finiment additives supportées en $\partial\Omega$ (les mesures qui sont nulles sur tout compact de $\Omega$). La convergence associée à la topologie faible-$*$ sur $\mathcal{C}_b'(\Omega)$ est appelée convergence étroite. C'est la notion de convergence utilisée en théorie des probabilités. Dans ce cadre, cette convergence est appelée convergence en loi.

On peut considérer différentes notions de convergence dans $\mathfrak{M}_b(\Omega)$. On a les implications :

$$\text{convergence étroite} \Rightarrow \text{convergence faible} \Rightarrow \text{convergence vague}$$

Si l'on se restreint à l'ensemble des mesures de probabilité, les trois convergences sont équivalentes.

### 4.6 Espaces de distributions

Enfin, ils reste les duaux topologiques des classes de fonctions très régulières. Ceux-ci n'admettent pas de description simple comme précédemment. Ce sont les plus gros espaces que l'on puisse rencontrer en analyse fonctionnelle.

L'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions. Il est défini comme le dual topologique de l'espace des fonctions tests $\mathcal{D}(\Omega)$.

D'après la topologie sur $D(\Omega)$ et les propriétés des evtlc, une forme linéaire $T$ sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est continue si et seulement si pour tout compact $K$ de $\Omega$, il existe un entier $p_K$ et une constante $C_K$ tels que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ tq } \operatorname{supp}\varphi \subset K, \quad |\langle T, \varphi \rangle| < C_K \sum_{|\alpha| \leq p_K} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$$

Une distribution est dite d'ordre fini si l'entier $p_K$ peut être choisi indépendamment du compact $K$, et est dite d'ordre infini sinon. De manière équivalente, elle est d'ordre fini si pour un certain $p \geq 0$, elle s'étend en une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_c^p(\Omega)$. Le plus petit entier $p$ possible s'appelle l'ordre de la distribution. En particulier les distributions d'ordre zéro coïncident avec les mesures de Radon sur $\Omega$.

Pour $\Omega = \mathbb{R}^d$, l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ des distributions tempérées. Il est défini comme le dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Une forme linéaire $T$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est continue si et seulement si il existe un entier $p$ et une constante $C$ tels que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad |\langle T, \varphi \rangle| < C \sum_{|\alpha| \leq p} \|x^\beta \partial^\alpha \varphi\|_\infty$$

En particulier c'est un sous-espace des distributions à support fini. C'est le plus grand des espaces usuels sur lequel il est possible de définir la transformée de Fourier.

L'espace $\mathcal{E}'(\Omega)$ des distributions à support compact. Il est défini comme le dual topologique de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. et

Une forme linéaire $T$ sur $\mathcal{E}'(\Omega)$ est continue si et seulement si il existe un compact $K$, un entier $p$ et une constante $C$ tels que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{E}(\Omega), \quad |\langle T, \varphi \rangle| < C \sum_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

Il s'identifie comme le sous espace des distributions dont le support est compact, et une telle distribution est d'ordre fini comme précédemment.